



دانشگاه گواران، دانشکده مهندسی آب و خاک

نشریه پژوهش‌های حفاظت آب و خاک

جلد بیست و هشتم، شماره دوم، ۱۴۰۰

۱-۲۱

<http://jwsc.gau.ac.ir>

DOI: 10.22069/jwsc.2021.18942.3440

مقاله کامل علمی - پژوهشی

## تحلیل تغییرات دبی نشت در پایین دست بندهای انحرافی؛ بازنگری راه حل پاولوفسکی

سید حسین مجتهدی<sup>۱</sup> و محمود فغفور مغربی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد،

<sup>۲</sup>استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۳۰

### چکیده

**سابقه و هدف:** احداث کف بندها و بندهای انحرافی که بر روی بسترهای آبرفتی ایجاد می‌شوند، نقش مهمی در حفاظت بستر رودخانه‌ها ایفا می‌کنند. طراحی این سازه‌ها بر روی پی‌های نفوذپذیر، نیازمند تعیین گرادیان خروجی و نشت بعد از انتهای پایین دست سازه می‌باشد که این مهم با تحلیل جریان نشت انجام می‌گیرد. جریان نشت می‌تواند در داخل و یا از زیر سازه‌های هیدرولیکی و هم‌چنین از بستر کانال‌های روباز رخ دهد. یکی از روش‌های موجود جهت بررسی جریان نشت و حل معادله لاپلاس، استفاده از روش‌های تحلیلی می‌باشد که معمولاً بر اساس تئوری نگاشت هم‌دیس استوار است. گرادیان هیدرولیکی در انتهای پایین دست و دبی نشت عبوری از زیر بند انحرافی می‌تواند توسط دیواره آب‌بند کنترل شود. در مقاله حاضر، روابط تحلیلی به صورت فرم بسته برای معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه، با آرایش‌های مختلف قرارگیری دیواره آب‌بند، که محیط متخلخل زیرین آن با عمق نامحدود می‌باشد ارائه شده است. مسأله برای چهار حالت مختلف دیواره آب‌بند قائم در انتهای پایین دست، دیواره آب‌بند قائم در انتهای بالادست، دو دیواره آب‌بند قائم با طول‌های مساوی در بالادست و پایین دست و سازه با کف مدفون حل شده است.

**مواد و روش‌ها:** در این مقاله، با استفاده از تئوری نگاشت هم‌دیس و یک دیدگاه ساده بر پایه معادله داریسی، در حالت گسترش نامحدود محیط متخلخل زیر سازه، معادلات گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت نسبت به فاصله از پایین دست سازه به دست آمده‌اند که در واقع، توسعه راه حل پاولوفسکی به حساب می‌آید. در تئوری نگاشت هم‌دیس از تبدیل شوارتز- کریستوفل استفاده می‌شود.

**یافته‌ها:** با توجه به معادلات به دست آمده، نمودارهای بی‌بعد برای تغییرات گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت عبوری از زیر سازه، نسبت به فاصله از انتهای پایین دست و هم‌چنین طول سازه تولید شده‌اند. با فرض این که  $b$  بعد طول سازه،  $s$  عمق آب‌بند،  $x$  فاصله از انتهای پایین دست و  $d$  عمق مدفون‌شدگی سازه باشند، تغییرات مقدار گرادیان هیدرولیکی

\* مسئول مکاتبه: maghrebi@um.ac.ir

در یک مقدار ثابت  $b/s$  یا  $b/d$ ، با افزایش فاصله از پایین دست سازه کاهش می‌یابد و نیز در یک مقدار ثابت  $x/s$  یا  $x/d$ ، با افزایش  $b/s$  یا  $b/d$ ، شاهد افت مقدار گرادیان هیدرولیکی خواهیم بود. با هدف محدود کردن نشت به مقداری مشخص که از طول معینی در انتهای پایین دست سازه خارج می‌شود، مقدار  $b/s$  در حالت وجود آب‌بند در بالادست به ترتیب بیش‌تر از دو آب‌بند، آب‌بند در پایین دست و سازه با کف مدفون می‌باشد.

**نتیجه‌گیری:** با توجه به نمودارهای به دست آمده و تحلیل آن‌ها، نتایج نشان می‌دهند که تأثیر وجود آب‌بند در پایین دست در کاهش دبی نشت بیش‌تر از سایر حالت‌ها و مقدار گرادیان هیدرولیکی در حالت سازه با کف مدفون کم‌تر از سایر حالت‌ها می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** بند انحرافی، روش پاولوفسکی، گرادیان هیدرولیکی، معادله داری، نشت، نگاشت هم‌دیس

### مقدمه

بررسی جریان نشت و حل معادله لاپلاس با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی قابل انجام است. روش‌های عددی معمولاً با استفاده از روش اجزاء محدود انجام می‌شود و روش‌های تحلیلی، معمولاً بر اساس تئوری نگاشت هم‌دیس استوار است. جریان نشت می‌تواند در داخل و یا از زیر سازه‌های هیدرولیکی و همچنین از بستر کانال‌های روباز رخ دهد. مجتهدی و فغفور مغربی (۲۰۱۰)، جریان نشت از بستر کانال‌های منحنی شکل را با استفاده از تئوری نگاشت هم‌دیس بررسی کردند (۱۶). این در حالی است که کف‌های نفوذناپذیر سازه‌های آبی باید طوری طراحی شوند که در برابر شکستگی کف به دلیل فشار بالابرنده و جوشش در انتهای پایین دست به دلیل گرادیان خروجی بیش‌ازحد، که آغاز مرحله لوله‌گذاری در زیر سازه است، مقاوم باشند. احمدیان و فغفور مغربی (۲۰۱۷) با استفاده از تئوری نگاشت هم‌دیس، موقعیت و زاویه قرارگیری بهینه دیواره‌های آب‌بند در سدهای انحرافی را به دست آوردند (۱). اما می‌توان گفت قدیمی‌ترین روش‌های تجربی طراحی در مورد سازه‌های هیدرولیکی، بر اساس تئوری بلای<sup>۱</sup>

و تئوری خزش وزنی لین<sup>۲</sup> می‌باشند. خوسلا و همکاران (۱۹۳۶) روش تحلیلی را برای سازه‌ها با دیواره آب‌بند میانی یا انتهایی در حالت عمق نامحدود محیط نفوذپذیر زیرین سازه ارائه کردند؛ آن‌ها همچنین روش متغیرهای مستقل را برای در نظر گرفتن دیواره‌های آب‌بند متعدد پیشنهاد کردند (۱۲). مالهوترا (۱۹۳۶) تحلیل کف‌بندهای مسطح با دیواره‌های آب‌بند مساوی در دو انتها را که در یک محیط نامحدود قرار دارند، ارائه نمود (۱۴). پولوبارینوا- کوچینا (۱۹۶۲) روش‌های تحلیلی پاولوفسکی<sup>۳</sup> را برای دو حالت نشت با عمق محدود زیرین سازه ارائه کرد: یکی کف‌بند مسطح با یک دیواره آب‌بند و دیگری کف‌های مدفون بدون دیواره آب‌بند. همچنین به راه‌حل تحلیلی فیلچاکوف<sup>۴</sup> در مورد نشت از یک محیط محدود با الگوهای مختلف بند انحرافی و دیواره آب‌بند پرداخته است (۱۷). هار (۱۹۶۲) نیز راه‌حل‌های تحلیلی را برای سازه‌های هیدرولیکی در حالت وجود یک دیواره آب‌بند و نیز دو دیواره آب‌بند در دو انتها و مدفون‌شدگی سازه در یک محیط با عمق نامحدود ارائه کرد (۷). بانرجی و

2- Lane  
3- Pavlovsky  
4- Filchakov

1- Bligh

(۲۰۱۵) را گسترش و توسعه دادند (۲۲). لو و همکاران (۲۰۱۸) با استفاده از یک روش تحلیلی-تقریبی به نام روش اجزاء<sup>۱</sup>، یک مدل برای محاسبه جریان ورودی آب به حفاری‌های عمیق ارائه کردند. اثرات ضخامت دیواره آب‌بند، عمق نفوذ آن و عرض حفاری بر جریان ورودی به خوبی در این مدل در نظر گرفته شد (۱۳). کاسیموف و همکاران (۲۰۱۹) نشت از یک سد خاکی ناحیه بندی شده با یک هسته رسی قائم، دو پوسته نفوذپذیر و زهکش در پنجه را مطالعه کردند. با استفاده از روش نگاشت همدیس و هدوگراف سرعت، نشت از طریق هسته و پوسته پایین‌دست باهم ترکیب‌شده و دبی جریان و سطح ایستابی به‌دست می‌آیند. در این مقاله، راه‌حل‌های تحلیلی قدیمی در مورد مسأله سد خاکی، مورد بازنگری قرار گرفت (۱۱). شیخ رضازاده نیکو و همکاران (۲۰۱۲) ابعاد و موقعیت دیواره‌های سپری، پتو<sup>۲</sup> و زهکش جهت کاهش نیروی زیر فشار، دبی نشت و گرادیان خروجی در پی سدهای انحرافی را به‌صورت آزمایشگاهی و عددی (روش اجزای محدود) مطالعه کردند (۱۸). منصوری و همکاران (۲۰۱۴) اثر موقعیت‌های مختلف و زاویه قرارگیری دیواره آب‌بند را بر گرادیان خروجی، دبی نشت و نیروی بالابرنده با استفاده از روش عددی بر مبنای اجزاء محدود، مورد بررسی قرار دادند (۱۵). سلماسی و همکاران (۲۰۲۰) آرایش‌های مختلف دو دیواره آب‌بند را در زیر سازه‌های هیدرولیکی، بر نیروهای بالابرنده و گرادیان هیدرولیکی با استفاده از روش عددی اجزاء محدود پژوهش کردند. آن‌ها مدل عددی خود را با استفاده از نتایج تحلیلی جین و ردی (۲۰۱۱) مقایسه و حداکثر خطا را ۵ درصد گزارش دادند (۱۹). سرتیبی و همکاران (۲۰۲۰) اثر عمق و

مولشکوف (۱۹۹۲) راه‌حل تحلیلی برای نشت در عمق محدود را در فرازبند دوجداره ارائه دادند (۳). ایجام (۱۹۹۴) راه‌حل تحلیلی نشت را از زیر یک بند انحرافی در یک محیط نامحدود باوجود یک دیواره آب‌بند شیب‌دار در انتهای پایین‌دست ارائه نمود. در این پژوهش وی معادله گرادیان هیدرولیکی را نسبت به فاصله از انتهای پایین‌دست به‌دست آورد (۸). فاروق و اسمیت (۲۰۰۰) طراحی سازه‌های هیدرولیکی را با دو زهکش میانی مطالعه کردند. سازه موردبررسی شامل دو دیواره آب‌بند در دو انتها بر روی محیط نفوذپذیر با عمق محدود و روش مورد استفاده، نگاشت همدیس می‌باشد. با استفاده از نتایج روش تحلیلی مذکور، نمودارهای طراحی برای استفاده آسان تولید شدند (۵). گوئل و پیلای (۲۰۱۰) اثر حفاظت سنگ‌چین پایین‌دست یک کف‌بند مسطح با یک دیواره آب‌بند در انتهای پایین‌دست را بر گرادیان خروجی در حالت نشت در عمق نامحدود مطالعه کردند (۶). جین و ردی (۲۰۱۱) مسأله نشت در عمق محدود در زیر یک کف‌بند مسطح با دو دیواره آب‌بند مساوی در انتهای بالادست و پایین‌دست را با استفاده از روش تحلیلی نگاشت همدیس، بررسی نمودند (۹). کاسیموف و اوبنوسوف (۲۰۱۲) نشت پایدار داری از هسته یک سد خاکی و پوسته‌های مجاور آن را به‌طور تحلیلی مطالعه کردند. روش تحلیلی مورد استفاده، نگاشت همدیس و هدوگراف سرعت است. هدف از این مقاله، بهبود بخشیدن راه‌حل‌های معادله لاپلاس برای مسأله سد، توسط مطالعه تحلیلی نشت از میان نواحی ناهمگن سد می‌باشد (۱۰). اندرسون (۲۰۱۵) یک راه‌حل دقیق برای جریان نشت از طریق یک دیواره آب‌بند نیمه نفوذپذیر را با استفاده از روش تصاویر به‌دست آورد (۲). یاکیموف و کاسیموف (۲۰۱۷) با استفاده از نگاشت همدیس، راه‌حل ارائه‌شده توسط اندرسون

1- Method of Fragments

2- Blanket

نگاشت همدیس، معادله دبی نشت نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه نیز مورد محاسبه قرار گرفته است.

### مواد و روش‌ها

روش تحلیلی مورداستفاده در این مقاله بر اساس روشی است که توسط پاولوفسکی پیشنهاد گردید. این روش، به کار بردن تبدیل شوارتز- کریستوفل<sup>۱</sup> در دو مرحله است. در مرحله اول، محیط صفحه فیزیکی مسأله (صفحه  $Z$ ) به نیم صفحه کمکی  $t$  نگاشت می‌شود و رابطه  $z = F_1(t)$  به دست می‌آید. در تبدیل مرحله دوم، ناحیه مستطیل شکل پتانسیل مختلط، صفحه  $\omega = \phi + i\psi$ ، که  $\psi$  خطوط جریان و  $\phi$  خطوط هم پتانسیل نام دارند، به شکل همدیس بر نیم صفحه کمکی  $t$  نگاشت شده و تابع  $\omega = F_2(t)$  به دست می‌آید. با استفاده از دو رابطه گفته شده، رابطه تابعی به صورت  $z = F(\omega)$  بین صفحات  $Z$  و  $\omega$  حاصل خواهد شد. رابطه تبدیل شوارتز- کریستوفل به صورت زیر می‌باشد:

$$z = M_1 \int_0^t \frac{dt}{(t-t_1)^{\lambda_1} (t-t_2)^{\lambda_2} \dots} + N \quad (1)$$

که در آن،  $t_1$ ،  $t_2$  و ... نقاط مختلف از صفحه  $Z$  بر روی نیم صفحه کمکی  $t$ ؛  $\lambda_1$ ،  $\lambda_2$  و ... زاویه نقاط متناظر در صفحه  $Z$  بر حسب رادبان و  $M_1$  و  $N$  نیز ثابت‌های رابطه هستند. در بخش اول از حالت‌های مورد بررسی، از نتایج روش حل ایجم (۱۹۹۴) در به دست آوردن معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی استفاده می‌شود (۸)؛ با این حال با توجه به این که در روش پاولوفسکی و در حالت گسترش نامحدود محیط متخلخل، به معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت نسبت به فاصله از انتهای

فاصله بین دیواره‌های آب‌بند را در سدهای وزنی، بر نیروی بالابرنده با استفاده از روش عددی اجزاء محدود مورد بررسی قرار دادند. جهت ارزیابی مدل‌سازی عددی، صحت نتایج با محاسبات تحلیلی مقاله جین و ردی (۲۰۱۱) مقایسه و انطباق خوبی بین نتایج مشاهده شد (۲۱). در مقاله دیگر سلماسی و همکاران (۲۰۲۰)، اثر دیواره آب‌بند در بالادست و فیلتر در پایین دست جهت کنترل نشت در سدها با استفاده از روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار گرفت. جهت اعتبارسنجی مدل عددی از داده‌های آزمایشگاهی استفاده شد. بر اساس این مطالعه، توصیه‌هایی جهت ترکیب مناسب دیواره آب‌بند در بالادست و فیلتر پایین دست ارائه گردید (۲۰).

در اکثر مطالعات انجام شده و در راه‌حل‌های تحلیلی پژوهشگران قبلی، معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی خروجی و دبی نشت نسبت به انتهای پایین دست سازه مشاهده نمی‌شود؛ تنها در مقاله ایجم (۱۹۹۴) و گوئل و پیلای (۲۰۱۰) به طور محدود به معادله گرادیان هیدرولیکی در انتهای پایین دست سازه در حالت وجود یک دیواره آب‌بند پرداخته شده است (۸ و ۶). در پژوهش حاضر، با توسعه روش پاولوفسکی و با استفاده از تئوری توابع مختلط، روابط تحلیلی به فرم بسته برای معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه و برای جریان نشت از زیر یک بند انحرافی، با آرایش‌های مختلف قرارگیری دیواره آب‌بند، که محیط متخلخل زیرین آن با عمق نامحدود می‌باشد به دست آمده است. مسئله برای چهار حالت مختلف دیواره آب‌بند قائم در انتهای پایین دست، دیواره آب‌بند قائم در انتهای بالادست، دو دیواره آب‌بند قائم با طول‌های مساوی در بالادست و پایین دست و سازه با کف مدفون حل شده است. علاوه بر آن، با استفاده از یک روش ساده بر پایه معادله داریسی در ترکیب با

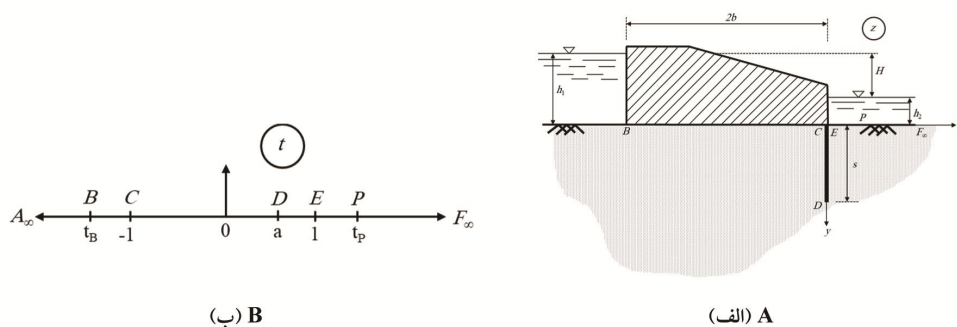
حالت‌های مختلف قرارگیری آب‌بند قائم و حل تحلیلی معادله گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از پایین دست سازه: در این بخش سه حالت مختلف قرارگیری سازه به همراه دیواره آب‌بند و یک حالت با عمق مدفون‌شدگی جهت بررسی معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت در نظر گرفته می‌شوند: الف) سازه با دیواره آب‌بند در انتهای پایین دست، ب) سازه با دیواره آب‌بند در بالادست و پایین دست و د) سازه با عمق مدفون‌شدگی.

**الف- آب‌بند قائم در انتهای پایین دست:** در این بخش، از مطالعات انجام‌شده توسط ایچام (۱۹۹۴) که حل تحلیلی مسأله نشت را در حالت قرارگیری دیواره آب‌بند شیب‌دار در انتهای پایین دست انجام داد، استفاده شده است (۸). وی معادله گرادیان هیدرولیکی را نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه به دست آورد. سپس حالت خاص آن، یعنی حالت آب‌بند قائم از آن استخراج گردید. شکل صفحه فیزیکی مسأله و صفحه کمکی در نگاشت انجام‌شده مذکور به صورت شکل‌های ۱-الف و ۱-ب هستند.

پایین دست سازه پرداخته نشده است، پژوهش حاضر می‌تواند به نوعی توسعه یا بهبود روش پاولوفسکی با الهام گرفتن از روش ایچام (۱۹۹۴) نیز تلقی شود (۸). در واقع برای به دست آوردن معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه، نقطه‌ای دلخواه در انتهای پایین دست در نظر گرفته شده و در معادلات نگاشت صفحه فیزیکی مسأله، اعمال می‌گردد. برای به دست آوردن معادله تغییرات دبی نشت نیز، از یک دیدگاه ساده و کاربردی استفاده می‌شود. این دیدگاه ساده بر اساس معادله دارسی<sup>۱</sup> استوار است که دبی نشت را به صورت  $q = k.i.A$  معرفی می‌کند. برای به دست آوردن معادله تغییرات دبی نشت، از جایگذاری معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی نسبت به انتهای پایین دست سازه، در رابطه فوق و انتگرال‌گیری از آن استفاده می‌شود. این رابطه به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$q = k \int_0^x i_e(x) dx \quad (2)$$

که در آن،  $q$  دبی نشت ( $m^3/s$ )،  $k$  هدایت هیدرولیکی محیط متخلخل ( $m/s$ ) و  $i_e(x)$  معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از انتهای پایین دست ( $x$ ) می‌باشند.



شکل ۱- صفحات نگاشت همدیس در حالت وجود آب‌بند در پایین دست. صفحه فیزیکی مسأله (صفحه z) (الف) و صفحه کمکی t (ب).

Figure 1. Conformal mapping planes in the case of cutoff at downstream end. Physical plane ( $z$  plane) (A) and Auxiliary plane ( $t$  plane) (B).

رابطه ۵ بر اساس رابطه‌های ۳ و ۴، برحسب  $b/s$  و  $x_p/s$  خواهد بود. خوسلا و همکاران (۱۹۳۶) نیز رابطه  $I_e = \frac{H}{d} \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda}}$  را برای مقدار گرادیان خروجی، درست در انتهای پایین سازه ارائه دادند که در آن،  $\lambda = \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2}$ ،  $\alpha = b/d$ ،  $b$  طول کل سازه و  $d$  عمق دیواره آب‌بند هستند (۱۲).

در این بخش برای محاسبه دبی نشت خروجی از انتهای سازه می‌توان از قانون داریسی استفاده کرد. به این صورت که با داشتن معادله گرادیان هیدرولیکی برحسب  $x$  از انتهای سازه (رابطه ۵) و انتگرال‌گیری از رابطه  $dq = k \cdot I_e(x) dx$ ، می‌توان دبی نشت را با توجه به فاصله از انتهای پایین دست محاسبه کرد:

$$\frac{q}{kH} = \frac{1}{\pi \cdot s} \int_0^x \frac{\sqrt{t_p + 1}}{t_p \sqrt{t_p - t_B}} dx \quad (6\text{-الف})$$

مقادیر پارامترهای  $t_p$  و  $t_B$  در رابطه ۶-الف باید از رابطه‌های ۳ و ۴ جایگزین شوند. با بی‌بعد کردن رابطه ۶-الف به صورت رابطه ۶-ب، معادله تغییرات  $q/kH$  نسبت به  $b/s$  با فرض  $x/s$ ‌های مشخص، قابل رسم خواهد بود.

$$\frac{q}{kH} = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sqrt{\sqrt{1 + (x_p/s)^2} + 1}}{\sqrt{1 + (x_p/s)^2} \sqrt{\sqrt{1 + (x_p/s)^2} - \sqrt{1 + (2b/s)^2}}} \frac{dx}{s} \quad (6\text{-ب})$$

پیشین مشاهده نشده و فقط به محاسبه مقدار گرادیان هیدرولیکی در انتهای پایین دست سازه اشاره شده است. در این حالت دیواره آب‌بند قائم در انتهای بالادست قرار گرفته است. صفحه فیزیکی مورد بررسی در شکل ۲-الف نشان داده شده است.

ایجام (۱۹۹۴) نقطه  $P$  را به عنوان یک نقطه دلخواه در انتهای پایین دست سازه انتخاب کرد که این نقطه در صفحه کمکی بر روی نقطه  $t_p$  نگاشت می‌شود (۸). پس از به دست آوردن رابطه بین صفحه فیزیکی مسأله و صفحه کمکی با استفاده از تبدیل شوارتز- کریستوفل، با جایگذاری مختصات نقاط  $B$  و  $P$  در آن، مقدار پارامترهای مجهول  $t_p$  و  $t_B$  از روابط زیر به دست می‌آیند:

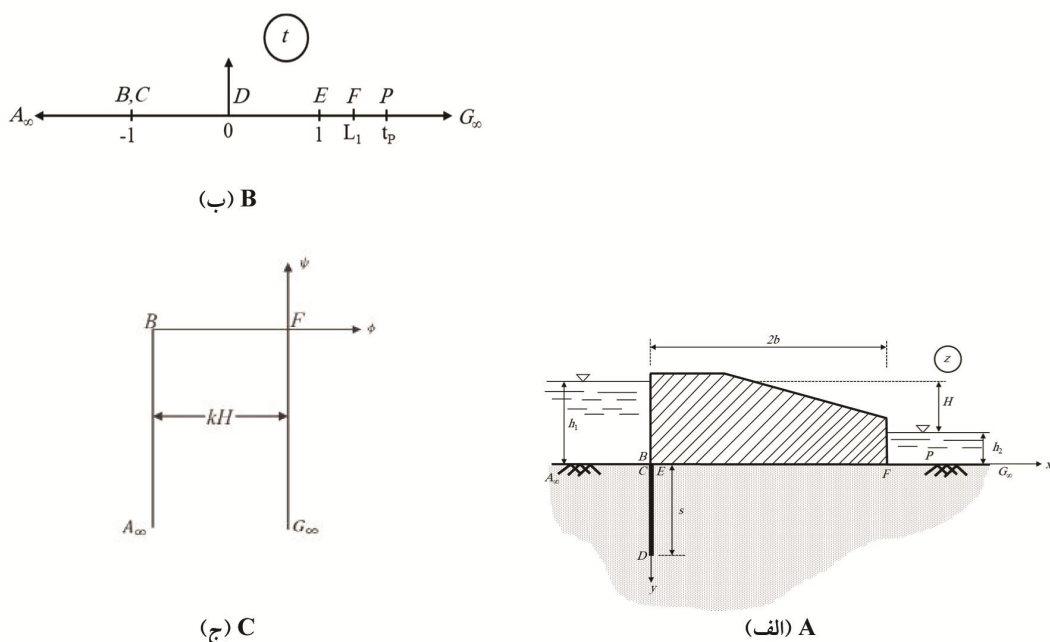
$$-2b/s = \sqrt{t_B^2 - 1} \quad (3)$$

$$x_p/s = \sqrt{t_p^2 - 1} \quad (4)$$

در شکل ۱-الف، محورهای مختصات نشان داده شده‌اند. در رابطه فوق،  $x_p$  مختص  $x$  نقطه  $P$  نقطه‌ای دلخواه بعد از انتهای پایین دست سازه، می‌باشد. با فرض این که دیواره آب‌بند به صورت قائم باشد؛ ایجام (۱۹۹۴) رابطه گرادیان هیدرولیکی خروجی به دست آمده در انتهای پایین دست سازه را به صورت زیر به دست آورد (۸):

$$I_e = \frac{H}{\pi \cdot s} \frac{\sqrt{t_p + 1}}{t_p \sqrt{t_p - t_B}} \quad (5)$$

ب- آب‌بند قائم در انتهای بالادست: در این بخش راه‌حل تحلیلی محاسبه معادله گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از پایین دست سازه با استفاده از نگاشت همدیس به دست آورده می‌شود. معادله گرادیان هیدرولیکی قبلاً در راه‌حل‌های پژوهشگران



شکل ۲- صفحات نگاشت همدیس در حالت وجود آب‌بند در بالادست. صفحه فیزیکی مسأله (صفحه  $z$ ) (الف)، صفحه کمکی  $t$  (ب) و صفحه پتانسیل مختلط (ج).

Figure 2. Conformal mapping planes in the case of cutoff at upstream end. Physical plane ( $z$  plane) (A), Auxiliary plane ( $t$  plane) (B), and Complex potential plane (C).

با اعمال شرایط نقطه  $F(z = 2b, t = L_1)$  در رابطه ۷ رابطه زیر برای محاسبه پارامتر مجهول  $L_1$  به دست می‌آید:

$$L_1 = \sqrt{1 + (2b/s)^2} \quad (8)$$

برای به دست آوردن معادله گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه، نیاز به نگاشت صفحه پتانسیل مختلط  $\omega$  داریم. صفحه پتانسیل مختلط به صورت شکل ۲-ج می‌باشد. با استفاده مجدد از تبدیل شوارتز- کریستوفل، رابطه نگاشت صفحه پتانسیل مختلط نیز حاصل خواهد شد:

$$\omega = \frac{kH}{\pi} \sin^{-1} \frac{t + \frac{1-L_1}{2}}{\frac{1+L_1}{2}} - \frac{kH}{2} \quad (9)$$

در شکل ۲-الف نقطه  $P$ ، نقطه‌ای دلخواه در پایین دست سازه است که با ابتدای سازه، فاصله‌ای برابر  $x_p = 2b + x$  دارد. در این شکل،  $BCDEF$  شکل کنتور سطح زیرین سازه را نشان می‌دهد که شامل آب‌بند  $CDE$  نیز می‌باشد. با نگاشت این صفحه بر روی نیم‌صفحه پایینی صفحه کمکی  $t$ ، شکل ۲-ب به دست خواهد آمد. نقاط  $F$  و  $P$  به ترتیب بر روی نقاط  $L_1$  و  $t_p$  نگاشت می‌شوند. این پارامترها، پارامترهای مجهول هستند که مقادیر آنها باید تعیین گردند. هار (۱۹۶۲) بر اساس روش پاولوفسکی، با اعمال تبدیل شوارتز- کریستوفل بین صفحه فیزیکی مسأله و صفحه کمکی، معادله زیر را برای صفحه  $z$  به دست آورد (۷):

$$z = s\sqrt{t^2 - 1} \quad (10)$$

چون خط جریان در نقطه بحرانی خروجی (نقطه انتهایی پایین دست سازه)، معمولاً  $\psi$  را برابر مقدار ثابت نشان می‌دهد (بنابراین  $d\phi/dt = d\omega/dt$ ) و مرز هم‌پتانسیل، تراز پایاب را با زاویه ۹۰ درجه ( $\theta = 90^\circ$ ) قطع می‌کند، معادله فوق به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$I_e = \frac{i}{k} \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{dz} \quad (۱۰)$$

که در آن،  $i$  همان عدد مختلط است. با محاسبه و جایگذاری  $\frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{dz}$  و مقادیر رابطه ۸ در رابطه ۱۰، رابطه زیر برای گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از انتهایی پایین دست سازه به دست خواهد آمد:

$$I_e = \frac{iH}{\pi \sqrt{\lambda^2 - (\lambda_1 + t)^2}} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{st}, \lambda = (1 + L_1)/2, \lambda_1 = (1 - L_1)/2 \quad (۱۱)$$

فاصله از انتهایی پایین دست سازه به دست خواهد آمد. مطابق بخش قبل با جایگذاری رابطه ۱۱ در رابطه  $dq = k \cdot I_e(x) dx$  می‌توان رابطه دبی را با توجه به فاصله از انتهایی پایین دست محاسبه کرد:

$$\frac{q}{kH} = \frac{i}{\pi \cdot s} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - (\lambda_1 + t)^2}} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t} dx, \lambda = (1 + L_1)/2, \lambda_1 = (1 - L_1)/2 \quad (۱۲-الف)$$

نسبت به  $b/s$  با فرض  $x/s$  های مشخص، قابل ترسیم خواهد بود.

$$\frac{q}{kH} = \frac{i}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \left(\lambda_1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2b}{s} + \frac{x}{s}\right)^2}\right)^2}} \frac{\left(\frac{2b}{s} + \frac{x}{s}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{2b}{s} + \frac{x}{s}\right)^2}} \frac{dx}{s} \quad (۱۲-ب)$$

خاص مانند توابع انتگرال‌های بیضوی برخوردار بوده و دلیل آن هم، ضمنی بودن معادله است و مانند معادلات بخش‌های قبل، جهت محاسبه دبی نشت

طبق تعریف، در روش پاولوفسکی، برای رابطه گرادیان هیدرولیکی، با استفاده از تبدیل شوارتز- کریستوفل ناحیه جریان در هر یک از صفحات  $z$  و  $\omega$  را می‌توان به‌طور همدیس بر روی نیم‌صفحه کمکی  $t$  نگاشت نمود و از آنجا با حذف متغیر  $t$  تابع  $\omega = f(z)$  را تعیین کرد. این روش برای تعیین تحلیلی شیب آبی خروجی مناسب است. ملاحظه می‌شود که شیب آبی در هر نقطه درون یک ناحیه جریان همسانگرد برابر با  $I_e = -\frac{dh}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dz} \frac{dz}{ds}$  است. در این رابطه،  $s$  امتداد خط جریان در آن نقطه می‌باشد. با قرار دادن  $\theta$  برای زاویه بین جهت خط جریان و محور  $x$  خواهیم داشت  $dz/ds = \cos \theta + i \sin \theta$ .

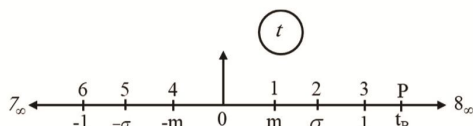
با جایگذاری مختصات نقطه  $P$  در رابطه ۷ به‌عنوان یک نقطه دلخواه در پایین دست سازه، می‌توان  $t_p$  را محاسبه کرد و در رابطه ۱۱ به‌جای پارامتر  $t$  قرار داد. بنابراین معادله گرادیان هیدرولیکی برحسب

مشابه روند رابطه ۶، با بی‌بعد کردن رابطه ۱۲-الف به صورت رابطه ۱۲-ب، معادله تغییرات  $q/kH$

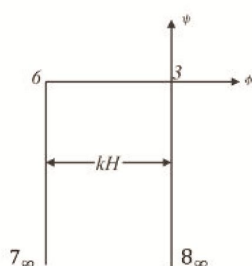
ج- دو آب‌بند قائم در انتهایی بالادست و پایین دست: در این بخش محاسبه معادله گرادیان هیدرولیکی از پیچیدگی محاسبات مربوط به توابع



۳-ج نیز به ترتیب صفحه کمکی و صفحه پتانسیل مختلط نشان داده شده‌اند.

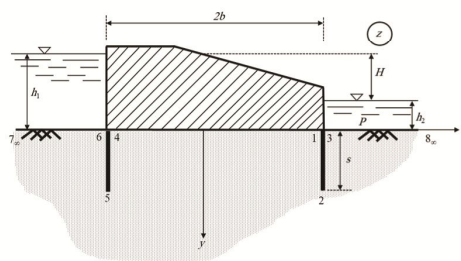


(ب) B



(ج) C

نمی‌توان رابطه صریحی را به‌دست آورد. صفحه فیزیکی مسأله در شکل ۳-الف و در شکل ۳-ب و



(الف) A

شکل ۳- صفحات نگاشت همدیس در حالت وجود دو آب‌بند. صفحه فیزیکی مسأله (صفحه  $z$ ) (الف)، صفحه کمکی  $t$  (ب) و صفحه پتانسیل مختلط (ج).

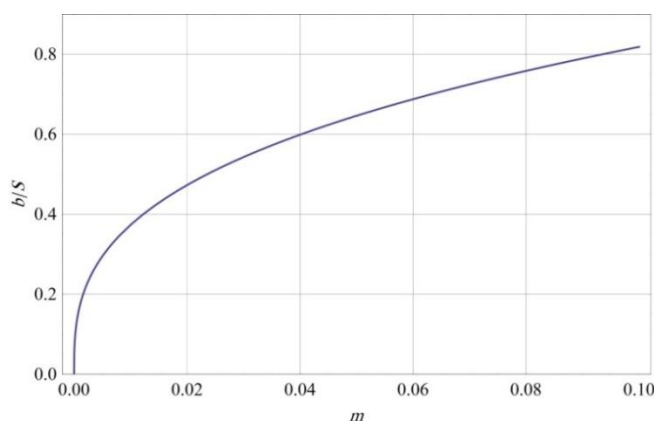
Figure 3. Conformal mapping planes in the case of double cutoff. Physical plane ( $z$  plane) (A), Auxiliary plane ( $t$  plane) (B), and Complex potential plane (C).

کمکی، معادله صفحه فیزیکی مسأله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$z = \frac{2b}{\pi} [(E' - K')F(\phi, m) + K'.E(\phi, m)] \quad (۱۳)$$

که در آن،  $E'$  و  $K'$  به ترتیب توابع انتگرال بیضوی کامل نوع اول و دوم با مدول  $m'$ ،  $F(\phi, m)$  و  $E(\phi, m)$  نیز توابع انتگرال بیضوی نوع اول و دوم با مدول  $m$  و آرگومان  $\phi$  می‌باشند و  $m' = \sqrt{1 - m^2}$  نیز مدول مکمل نام دارد. هار (۱۹۶۲)، نموداری را برای به‌دست آوردن پارامتر  $m$  به‌صورت شکل ۴ ارائه و برای پارامتر مجهول  $\sigma$  نیز رابطه  $\sigma^2 = E'/K'$  را ارائه کرد (۷).

هار (۱۹۶۲) این مسأله را در حالت سازه با دو آب‌بند به همراه عمق مدفون‌شدگی سازه به مقدار  $d$  حل کرد که البته فقط به مقدار گرادیان هیدرولیکی در انتهای پایین‌دست اشاره کرده است (۷). در این مقاله مقدار  $d$  برابر صفر است و هدف، به‌دست آوردن معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی در انتهای پایین‌دست سازه با استفاده از روش نگاشت همدیس می‌باشد. مطابق حالت‌های قبلی، صفحه فیزیکی مسأله بر روی نیم‌صفحه کمکی نگاشت می‌شود و سپس از تبدیل شوارتز- کریستوفل استفاده خواهد شد. در شکل ۳-ب پارامترهای  $m$  و  $\sigma$  مجهول می‌باشند. پس از نگاشت صفحه فیزیکی مسأله بر روی صفحه



شکل ۴- تغییرات پارامتر  $m$  برحسب  $b/s$  (باز ترسیم‌شده از هار (۱۹۶۲)).

Figure 4. Variation of  $b/s$  versus  $m$  (Re drawn from Harr (1962)).

با انجام روندی مشابه بخش‌های قبل، با انجام نگاشت صفحه پتانسیل مختلط، معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

با انجام روندی مشابه بخش‌های قبل، با انجام نگاشت صفحه پتانسیل مختلط، معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{x_p}{s} = \frac{b}{s} \left\{ \frac{2}{\pi} [(E' - K')F(\theta, m) + K'.E(\theta, m)] - 1 \right\} \quad (16)$$

$$\omega = \frac{kH}{\pi} \cos^{-1} t \quad (14)$$

با توجه به مختلط بودن آرگومان توابع انتگرال‌های بیضوی نوع یک و دو در رابطه فوق، این توابع بر اساس بیرد و فریدمن (۱۹۷۱)، به صورت زیر تعریف می‌شوند (۴):

آنچه در این بخش اهمیت دارد، به دست آوردن معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی برحسب فاصله از انتهای پایین دست سازه است که در دو حالت قبل، رابطه صریحی برای آن به دست آمد. طبق تعریف گرادیان هیدرولیکی مطابق رابطه ۱۰، برای معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$F(\theta, m) = F(\beta, m) + iK' \quad (17)$$

$$I_e = \frac{iH}{2b} \frac{\sqrt{m^2 - t^2}}{K'(t^2 - \sigma^2)} \quad (15)$$

$$E(\theta, m) = E(\beta, m) + i(K' - E') + \cot \beta \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \beta} \quad (18)$$

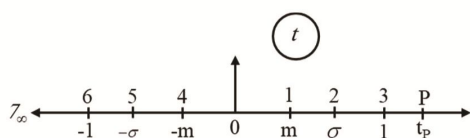
که در آن‌ها،  $\beta = \sin^{-1}(1/t_p)$  است. در حالت دو دیواره آب‌بند در بالادست و پایین دست، با توجه به ضمنی بودن معادلات و برای محاسبه دبی نشت، نمی‌توان به طور مستقیم مقدار  $t_p$  را از رابطه ۱۶ برحسب  $x_p/s$  محاسبه و سپس در رابطه  $dq = k.I_e(x)dx$  قرار داد و انتگرال‌گیری نمود. برای محاسبه مقدار دبی نشت از انتهای پایین دست سازه، باید با قرار دادن مقادیر مختلف برای  $x_p/s$  در رابطه ۱۶، مقدار  $t_p$  را به دست آورد. در ادامه، با

رابطه ۱۵ یک رابطه ضمنی است. برای به دست آوردن پارامتر  $t$ ، با قرار دادن مختصات نقطه  $P(z = b + x_p, t = t_p)$  در رابطه ۱۳ می‌توان مقدار  $t_p$  را محاسبه کرد. ضمناً باید توجه کرد که با توجه به شکل ۳-ب،  $t_p > 1$  است و با جایگذاری مختصات نقطه  $P$  در رابطه ۱۳، مقدار آرگومان توابع انتگرال بیضوی نوع یک و دو که به صورت

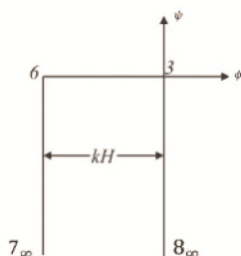
ساختار سازه در زیر سطح بر روی معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت نسبت به فاصله از انتهای سازه، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این بخش نیز مشابه بخش قبل، محاسبه معادله گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت از پیچیدگی محاسبات مربوط به توابع خاص مانند توابع انتگرال‌های بیضوی برخوردار و دلیل آن هم ضمنی بودن معادله است؛ به طوری که نمی‌توان رابطه صریحی را به دست آورد. صفحه فیزیکی مسأله در شکل ۵-الف و در شکل‌های ۵-ب و ۵-ج نیز به ترتیب صفحه کمکی و صفحه پتانسیل مختلط نشان داده شده‌اند.

جایگذاری آن در رابطه ۱۵ مقدار گرادیان هیدرولیکی را محاسبه و سپس مقدار دبی را به صورت تجمعی از انتهای پایین دست سازه محاسبه کرد. در روابط فوق پارامتر منحنی  $b/s$  در مدول  $m$  مستتر و از شکل ۴ قابل استخراج است. معادله ۱۵ که برای تغییرات تابع گرادیان هیدرولیکی نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه به دست آمده و همچنین محاسبه تغییرات تابع دبی نشت بر اساس آن، تاکنون به صورت تحلیلی در پژوهش‌های قبل مشاهده نشده است.

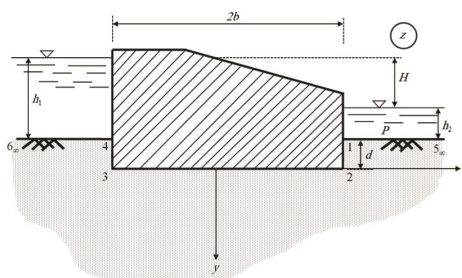
د- سازه با کف مدفون: در حالت‌های قبل فرض بر این بود که پایه ساختار سازه بر روی سطح محیط جریان نشت قرار دارد. در این بخش، تأثیر قرار گرفتن



(ب) B



(ج) C



(الف) A

شکل ۵- صفحات نگاشت هم‌دیس در حالت وجود سازه با کف مدفون. صفحه فیزیکی مسئله (صفحه  $z$ ) (الف)، صفحه کمکی  $t$  (ب) و صفحه پتانسیل مختلط (ج).

Figure 5. Conformal mapping planes in the case of depressed floor. Physical plane ( $z$  plane) (A), Auxiliary plane ( $t$  plane) (B), and Complex potential plane (C).

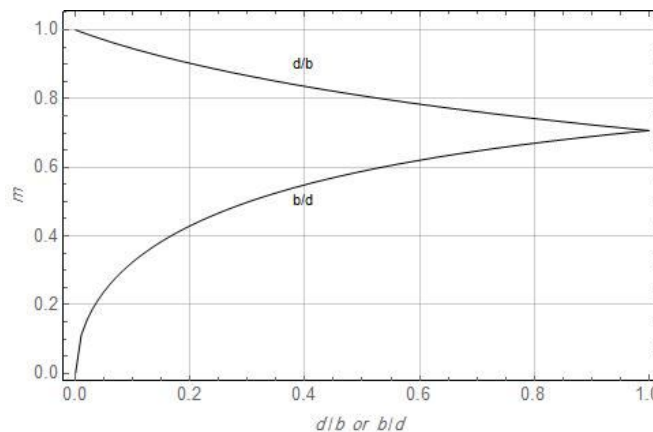
انتهای پایین دست سازه با استفاده از روش نگاشت هم‌دیس می‌باشد. مطابق حالت‌های قبلی، صفحه فیزیکی مسأله بر روی نیم‌صفحه کمکی نگاشت می‌شود و سپس از تبدیل شوارتز- کریستوفل استفاده

هار (۱۹۶۲) این مسأله را حل کرد که البته فقط به مقدار گرادیان هیدرولیکی در انتهای پایین دست اشاره کرده است (۷). در این مقاله، هدف، به دست آوردن معادله تغییرات گرادیان هیدرولیکی در

که در آن،  $K$  و  $E$  به ترتیب توابع انتگرال بیضوی کامل نوع اول و دوم با مدول  $m$  و تعریف سایر پارامترها نیز مشابه بخش قبل است. هار (۱۹۶۲)، نموداری را برای به دست آوردن پارامتر  $m$  به صورت شکل ۶ ارائه کرد (۷).

خواهد شد. در شکل ۵-ب پارامتر  $m$  مجهول است. پس از نگاشت صفحه فیزیکی مسأله بر روی صفحه کمکی، معادله صفحه فیزیکی مسأله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$z = \frac{b}{E - m'^2 K} [E(\phi, m) - m'^2 F(\phi, m)] \quad (۱۹)$$



شکل ۶- تغییرات پارامتر  $m$  برحسب  $d/b$  (باز ترسیم شده از هار (۱۹۶۲)).

Figure 6. Variation of  $m$  versus  $d/b$  (Re drawn from Harr (1962)).

آرگومان مختلط، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{x_p}{d} = \frac{b}{d} \left[ \frac{E(\theta, m) - m'^2 F(\theta, m)}{E - m'^2 K} - 1 \right] + i \quad (۲۱)$$

با توجه به مختلط بودن آرگومان توابع انتگرال‌های بیضوی نوع یک و دو در رابطه فوق، به طور مشابه این توابع به صورت رابطه‌های ۱۷ و ۱۸ قابل تعریف هستند. در این حالت با توجه به ضمنی بودن معادلات و برای محاسبه دبی نشت، نمی‌توان به طور مستقیم مقدار  $t_p$  را از رابطه ۲۱ برحسب  $x_p/d$  محاسبه و سپس در رابطه  $dq = k.I_e(x)dx$  قرارداد و انتگرال‌گیری نمود. برای محاسبه مقدار دبی نشت از انتهای پایین دست سازه، باید با قرار دادن مقادیر مختلف برای  $x_p/d$  در رابطه ۲۱، مقدار  $t_p$  را به دست آورد. در ادامه با جایگذاری آن در رابطه ۲۰،

با توجه به اینکه نگاشت صفحه پتانسیل مختلط مشابه بخش قبل است، طبق تعریف گردایان هیدرولیکی، معادله آن به صورت زیر خواهد بود:

$$I_e = \frac{-iH}{\pi} \frac{E - m'^2 K}{b\sqrt{m^2 - t^2}} \quad (۲۰)$$

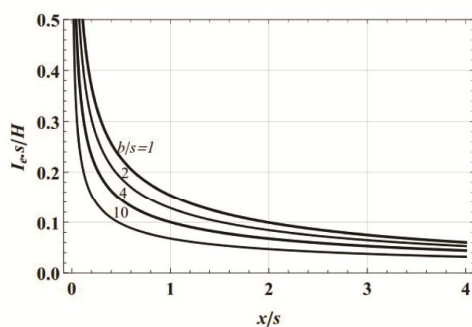
رابطه ۲۰ یک رابطه ضمنی است. با قرار دادن مختصات نقطه  $P(z = (b + x_p) - id, t = t_p)$  در رابطه ۱۹ می‌توان مقدار  $t_p$  را محاسبه کرد. ضمناً باید دقت کرد با توجه به این که  $t_p > 1$  است، با جایگذاری مختصات نقطه  $P$  در رابطه ۱۹، مقدار آرگومان توابع انتگرال بیضوی نوع یک و دو به صورت  $\theta = \sin^{-1}(t_p/m)$  تعریف می‌شود که یک عدد مختلط خواهد بود و پس از حل رابطه برای یک

گردان هیدرولیکی و دبی نشت ارائه شده‌اند. دانستن نحوه تغییرات مقدار گردان هیدرولیکی در انتهای پایین دست سازه، برای مهندسان طراح از اهمیت بالایی برخوردار است که در نمودارهای شکل‌های ۷ و ۸ ارائه شده‌اند. اهمیت این تغییرات در طراحی تمهیدات حفاظتی پایین دست بندهای انحرافی است. با توجه به معادلات تغییرات گردان هیدرولیکی نسبت به فاصله از انتهای پایین دست سازه، در شکل ۷، نمودار تغییرات  $I_{e,s}/H$  نسبت به  $x/s$  و برحسب  $b/s$  برای چهار حالت مختلف نشان داده شده است (توجه شود که در حالت سازه با کف مدفون، تغییرات  $I_{e,d}/H$  نسبت به  $x/d$  و برحسب  $b/d$  رسم شده است).

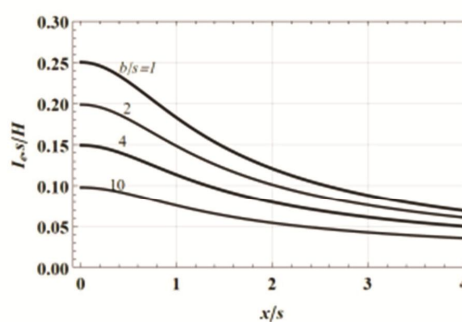
مقدار گردان هیدرولیکی را محاسبه و سپس مقدار دبی را به صورت تجمعی از انتهای پایین دست سازه محاسبه کرد. در روابط فوق پارامتر منحنی  $b/d$  در مدول  $m$  مستتر و از شکل ۶ قابل استخراج است.

### نتایج و بحث

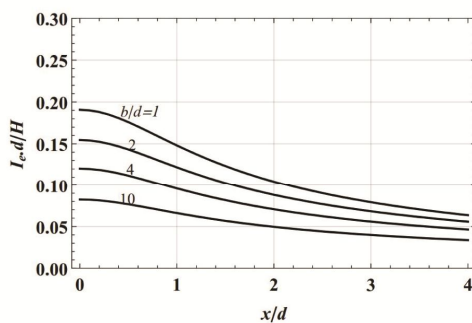
یکی از نتایج مهم و جنبه‌های کاربردی ناشی از راه‌حل‌های تحلیلی که در این پژوهش نیز از آن استفاده شده است، به دست آوردن روابط کلی به فرم بسته و تبدیل آن‌ها به نمودارهای کاربردی و بی‌بعدی است که استفاده از روابط تحلیلی را در طراحی بندهای انحرافی که بر روی بسترهای آبرفتی احداث می‌شوند، تسهیل می‌کند. در اشکال ذیل، بر اساس روابط به دست آمده، نمودارهایی جهت تعیین تغییرات



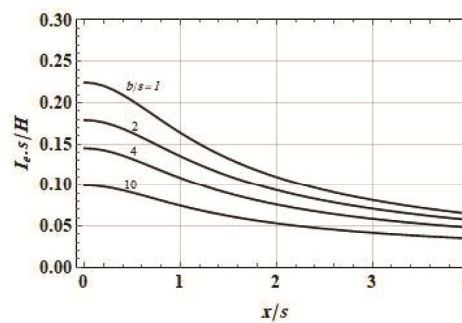
(ب) B



(الف) A



(د) D



(ج) C

شکل ۷- تغییرات گردان هیدرولیکی نسبت به  $x/s$  ( $x/d$ ) برحسب پارامتر  $b/s$  ( $b/d$ ). دیواره آب‌بند در پایین دست (الف)، دیواره آب‌بند در بالادست (ب)، دو دیواره آب‌بند (ج) و سازه با کف مدفون (د).

Figure 7. Hydraulic gradients variation versus  $x/s$  ( $x/d$ ) and  $b/s$  ( $b/d$ ) as curve parameter. Cutoff at downstream (A), Cutoff at upstream (B), Double cutoffs (C), and Depressed floor (D).

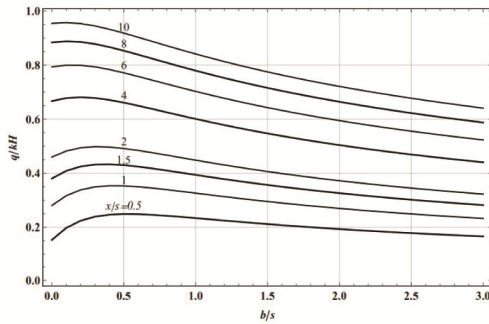
منحنی‌ها برابرند (۱۲). در این بخش مقایسه‌ای نیز با روش تحلیلی جین و ردی (۲۰۱۱) انجام می‌شود (۹). در پژوهش جین و ردی (۲۰۱۱)، راه‌حل تحلیلی برای یک کف‌بند با دو دیواره آب‌بند در دو انتها که یک‌لایه نفوذناپذیر با عمق محدود در زیر آن قرار گرفته، به‌دست‌آمده است (۹). با افزایش عمق لایه زیرین کف‌بند در راه‌حل جین و ردی (۲۰۱۱)، می‌توان به حالت مدنظر در این مقاله، یعنی عمق نامحدود لایه زیرین سازه، نزدیک شد و نتایج مقدار گرادیان هیدرولیکی درست در انتهای پایین‌دست سازه را با نتایج مقدار گرادیان هیدرولیکی در مقاله حاضر برای دو دیواره آب‌بند، زمانی که نسبت  $x/s=0$  است، مقایسه کرد (۹). در مقاله جین و ردی (۲۰۱۱)،  $B$  طول کل کف‌بند،  $c$  عمق دیواره آب‌بند و  $D$  عمق لایه نفوذپذیر زیرین است (۹). با فرض  $B/c=10$  و میل کردن ضخامت لایه نفوذپذیر زیرین به بی‌نهایت، از رابطه ارائه‌شده در مقاله جین و ردی (۲۰۱۱)، مقدار  $I_e s/H$  برابر  $0/13$  به‌دست می‌آید (۹). در مقاله حاضر، چون مقدار گرادیان هیدرولیکی درست در انتهای پایین‌دست سازه مدنظر است، با توجه به  $2b/s=10$ ، مقدار پارامتر  $m=0/77$  و مختصات نقطه  $P(z=b, t=1)$  می‌باشد. در نتیجه با استفاده از رابطه ۱۵ مقدار  $I_e s/H$  برابر  $0/129$  حاصل می‌شود.

همان‌طور که از نمودارهای شکل ۷ ملاحظه می‌شود، مقدار گرادیان هیدرولیکی با افزایش طول سازه (نسبت  $b/s$  یا  $b/d$ ) یا افزایش فاصله نسبت به انتهای سازه (نسبت  $x/s$  یا  $x/d$ )، کاهش می‌یابد. با توجه به نوع خاک زیرین سازه، گرادیان ایمن طبق خوسلا و همکاران (۱۹۳۶)، با در نظر گرفتن ضریب اطمینان، یک‌چهارم تا یک‌هفتم می‌باشد (۱۲). در نتیجه طراح می‌تواند با توجه به مقادیر  $b, s$  و  $H$  گرادیان هیدرولیکی را درست در انتهای پایین‌دست به‌دست آورد (نقاط شروع نمودارهای شکل ۷). در صورت بیشتر بودن گرادیان از حد ایمن، طولی در پایین‌دست سازه که لازم است تمهیدات حفاظتی اجرا شود ( $x/s$  یا  $x/d$ ) تا مقدار گرادیان به حد ایمن برسد، از روی نمودارها قابل استخراج است. هم‌چنین در شکل ۷-الف مشاهده می‌شود که نقاط شروع مقادیر نمودارها، مقدار گرادیان هیدرولیکی را درست در انتهای پایین‌دست سازه نشان می‌دهند که با مقادیر به‌دست‌آمده از رابطه خوسلا و همکاران (۱۹۳۶) مطابقت دارد (۱۲). بر اساس رابطه خوسلا و همکاران (۱۹۳۶)، مقادیر  $\lambda$  برای پارامترهای مختلف  $b/s$  بر روی منحنی، به ترتیب برابر  $1/618$ ،  $2/562$ ،  $4/531$  و  $10/51$  هستند و در نتیجه مقدار  $I_e d/H = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}$  به‌ترتیب برابر است با  $0/25$ ،  $0/199$ ،  $0/15$  و  $0/098$  که با نقاط شروع

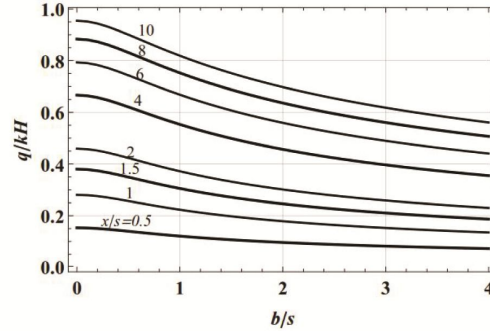


حالت به صورت  $\frac{I_e d}{H} < \frac{I_e s}{H_{d.c.}} < \frac{I_e s}{H_{d/s.c.}}$  می‌باشد (منظور از  $d.c. = \text{double cutoff}$  و  $d/s.c. = \text{downstream cutoff}$  است).

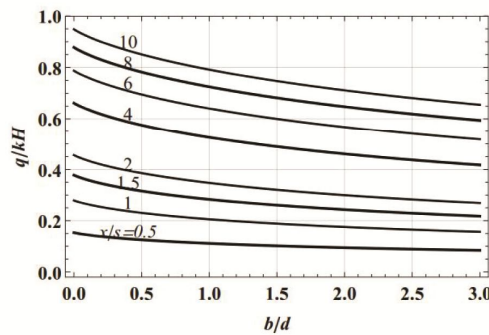
سایر حالت‌ها دارد. به این صورت که در یک مقدار ثابت  $x/s$ ، با افزایش مقدار  $b/s$ ، مقایسه بین مقادیر گرادیان هیدرولیکی متناظر در سه



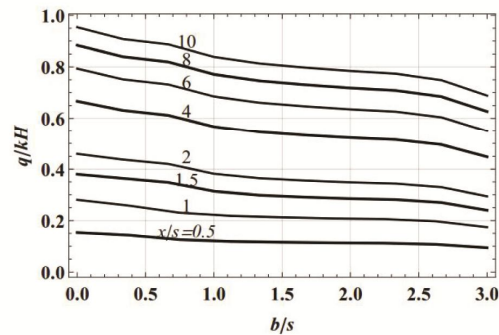
(ب) B



(الف) A



(د) D



(ج) C

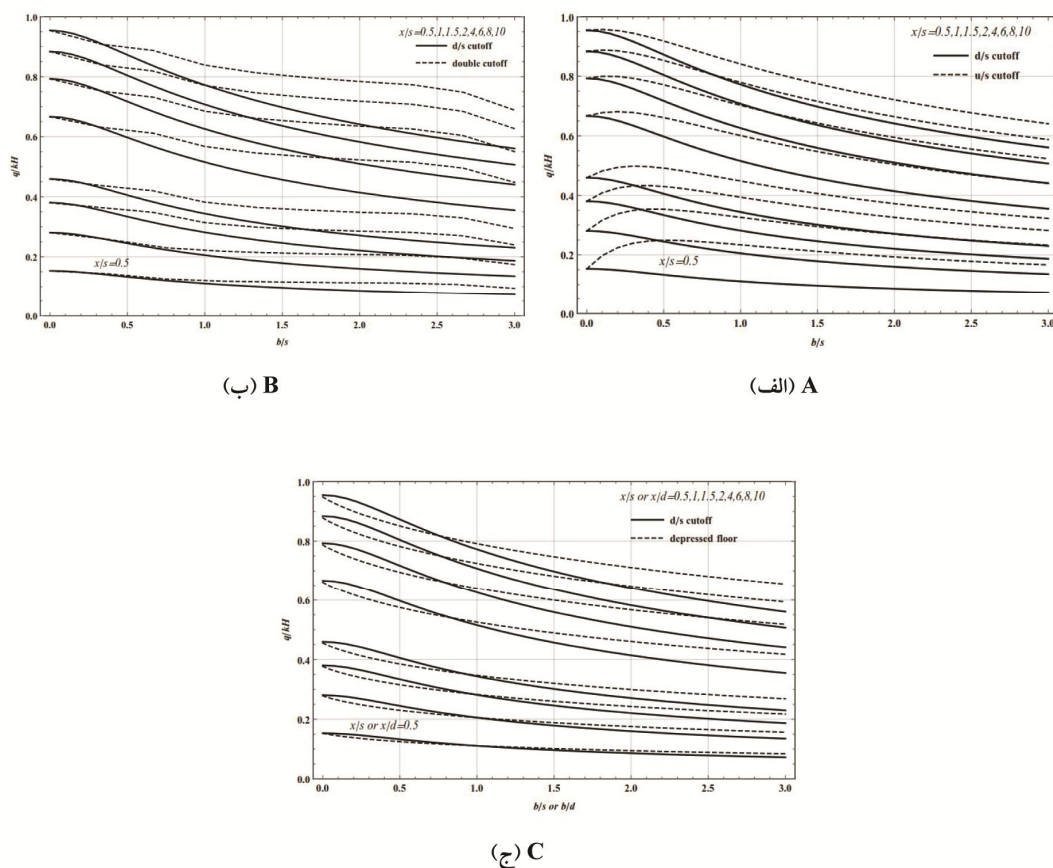
شکل ۹- تغییرات دبی نشت نسبت به  $x/s$  ( $x/d$ ) برحسب پارامتر  $b/s$  ( $b/d$ ). دیواره آب‌بند در پایین‌دست (الف)، دیواره آب‌بند در بالادست (ب)، دو دیواره آب‌بند (ج) و سازه با کف مدفون (د).

Figure 9. Seepage discharge variations versus  $x/s$  ( $x/d$ ) and  $b/s$  ( $b/d$ ) as curve parameter. Cutoff at downstream (A), Cutoff at upstream (B), Double cutoffs (C), and Depressed floor (D).

کاهش پیدا خواهد کرد. ضمناً در فواصل دورتر از انتهای پایین‌دست سازه، با افزایش طول سازه، دبی با شیب بیشتری کاهش می‌یابد و فاصله نمودارهای  $x/s$  از هم، کاهش پیدا می‌کند؛ یعنی با دور شدن از انتهای سازه، میزان نرخ شدت افزایش دبی، کم‌تر می‌شود.

در شکل ۹، نمودار تغییرات  $q/kH$  نسبت به  $b/s$  و برحسب  $x/s$  برای چهار حالت مختلف نشان داده شده است (توجه شود که در حالت سازه با کف مدفون، تغییرات  $q/kH$  نسبت به  $b/d$  و برحسب  $x/d$  رسم شده است). در شکل ۹ مشاهده می‌شود که با افزایش فاصله از انتهای پایین‌دست سازه، دبی افزایش و با افزایش طول سازه، دبی نشت





شکل ۱۰- مقایسه تغییرات دبی نشت حالت دیواره آببند در پایین دست و سایر حالت‌ها. دیواره آببند در پایین دست و بالادست (الف)، دیواره آببند در پایین دست و دو دیواره آببند (ب) و دیواره آببند در پایین دست و سازه با کف مدفون (ج).

Figure 10. Comparison of downstream cutoff seepage discharge with other cases. Cutoff at downstream and upstream (A), Cutoff at downstream and double cutoff(B), and Cutoff at downstream and depressed floor (C).

در شکل ۱۰، مقایسه‌ای بین تغییرات دبی نشت در حالت آببند در پایین دست با سه حالت دیگر انجام شده است. روند کلی در هر سه مقایسه نشان دهنده این موضوع است که مقدار دبی نشت در حالت آببند در پایین دست نسبت به سایر حالت‌ها کمتر است. تنها در شکل ۱۰-ج، مشاهده می شود که در مقدار حدودی  $b/s$  or  $(b/d)=0.75$  مقدار دبی نشت سازه با کف مدفون، کم تر از مقدار متناظر در حالت سازه با آببند در پایین دست است و پس از مقدار حدودی ذکر شده، مقدار دبی نشت سازه با آببند در پایین دست، کم تر از مقدار متناظر آن در حالت سازه با کف مدفون خواهد بود. هم چنین

اختلاف نمودارها در شکل های ۱۰-ب و ۱۰-ج و در فواصل کوچک از انتهای پایین دست کم تر است و با افزایش فاصله از انتهای پایین دست سازه، اختلاف دبی های نشت بیش تر خواهند شد. یکی از کاربردهای مهم مهندسی، تغییرات دبی نشت نسبت به انتهای پایین دست سازه است که می توان از آن در استحصال جریان زیرسطحی استفاده نمود. با توجه به نمودارهای شکل ۱۰، با داشتن مقادیر  $b$ ،  $k$  و  $H$ ، دبی نشتی را که می توان آن را با استفاده از سیستم های زهکشی زیرسطحی استحصال کرد، به دست آورد. با هدف محدود کردن نشت به مقداری مشخص که از طول معینی در انتهای پایین دست سازه خارج می شود،

انتهای پایین دست سازه برای دیواره آب‌بند در پایین دست، دو دیواره آب‌بند و سازه با کف مدفون به ترتیب برابر  $0/2$ ،  $0/18$  و  $0/082$  خواهند شد. مقدار گرادیان هیدرولیکی در دو حالت اول بیش تر از گرادیان هیدرولیکی ایمن است بنابراین طولی در پایین دست سازه برای اجرای تمهیدات حفاظتی (مانند اجرای فیلتر معکوس و بلوک‌گذاری بتنی) باید در نظر گرفته شود تا گرادیان هیدرولیکی به مقدار ایمن خود برسد. این طول بر اساس مراجع موجود که طراحی بر اساس آن‌ها انجام می‌گیرد، برابر  $1/05s=7/0$  m پیشنهاد می‌شود درحالی‌که بر اساس شکل ۷-الف و ۷-ج، برای سازه با دیواره آب‌بند در پایین دست و سازه با دو دیواره آب‌بند، مقدار  $x/s$  برای این که مقدار گرادیان هیدرولیکی به حد ایمن خود برسد به ترتیب برابر  $1/2$  و  $0/8$  است و طول حفاظتی نیز به ترتیب برابر  $6$  m و  $4$  m خواهند بود. همان‌طور که مشاهده می‌شود حالت سازه با کف مدفون، ایمن می‌باشد. هم‌چنین، با توجه به این که برای جلوگیری از آب شستگی، بعد از طول حفاظتی مذکور نیاز به یک کف سنگ‌چین شده می‌باشد، طبق مراجع موجود، این طول برابر همان طول حفاظت شده ( $1/05s$ ) پیشنهاد می‌گردد بنابراین مقدار طول سنگ‌چین نیز به جای  $7/0$  m مقادیر  $6$  m و  $4$  m خواهند بود. با انتخاب سازه با کف مدفون در طراحی، می‌توان طول سازه را نیز کم‌تر در نظر گرفت؛ با این حال، مقدار گرادیان هیدرولیکی و تغییرات آن بر اساس پارامترهای مسأله، در هر حالت، قابل ارزیابی خواهد بود.

### نتیجه‌گیری کلی

در این پژوهش، روابط به‌دست‌آمده از حل تحلیلی برای خصوصیات جریان نشت اعم از گرادیان هیدرولیکی و دبی نشت، به‌صورت نمودارهای بی‌بعد تبدیل شدند که می‌توانند در طراحی بندهای انحرافی مورد استفاده قرار بگیرند. بر اساس نتایج و نمودارهای

مقدار  $b/s$  در حالت وجود آب‌بند در بالادست به‌ترتیب بیش‌تر از دو آب‌بند، آب‌بند در پایین دست و سازه با کف مدفون می‌باشد (البته ترتیب حالت آب‌بند در پایین دست با حالت سازه با کف مدفون می‌تواند بسته به مقدار  $b/s$  یا  $b/d$  جابجا شود). به‌عنوان مثال در نسبت  $x/s=2$  و نشت  $q/kH=0/4$ ، نسبت  $b/s$  در حالت آب‌بند در بالادست، دو آب‌بند، آب‌بند در پایین دست و سازه با کف مدفون، به ترتیب دارای مقادیر  $1/05$ ،  $0/85$ ،  $0/6$  و  $0/4$  می‌باشند. با فرض عبور دبی یکسان نشت از چهار حالت، در شرایط ثابت بودن مقدار  $b/s$ ، به ترتیب در حالت سازه با کف مدفون، آب‌بند در پایین دست، دو آب‌بند و آب-بند در بالادست به طول‌های بزرگ‌تری در انتهای پایین دست جهت عبور دبی نشت موردنیاز است. به‌عنوان مثال در نسبت  $b/s=0/6$  و نشت  $q/kH=0/4$ ، نسبت  $x/s$  به ترتیب دارای مقادیر  $2/2$ ،  $2$ ،  $1/4$  و  $1/3$  می‌باشند.

در انتهای این بخش برای نشان دادن جنبه کاربردی نمودارهای تغییرات گرادیان هیدرولیکی در طراحی بندهای انحرافی، مثالی عددی ذکر می‌شود. سازه هیدرولیکی یک بند انحرافی را در حالت‌های مختلف مانند شکل ۱-الف (سازه با دیواره آب‌بند در پایین دست)، ۳-الف (سازه با دو دیواره آب‌بند) و ۵-الف (سازه با کف مدفون) در نظر بگیرید. اگر اختلاف هد بالادست و پایین دست سازه برابر  $H=5$  m، طول کل سازه  $b=20$  m، عمق دیواره آب‌بند برابر  $s=5$  m، عمق مدفون‌شدگی برابر  $d=1$  m و گرادیان هیدرولیکی ایمن بر اساس مشخصات خاک زیرین سازه برابر  $1/7$  فرض شوند، طول حفاظت پایین دست سازه برای جلوگیری از جوشش، در حالت‌های مختلف، به طریقی که در ادامه توضیح داده می‌شود به‌دست می‌آید. با داده‌های فوق،  $b/s=2$  و  $b/d=10$  هستند؛ در نتیجه با استفاده از نمودارهای شکل‌های ۷ یا ۸، گرادیان هیدرولیکی ( $I_e$ ) درست در

جاری و در دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی عمران در حال انجام است.

### تعارض منافع

در این مقاله، تعارض منافی وجود ندارد و این مسأله مورد تأیید همه نویسندگان است.

### مشارکت نویسندگان

در مقاله حاضر، نویسنده اول در مدل‌سازی تحلیلی، محاسبات، ترسیم نمودارها، تحلیل و تفسیر نتایج و نگارش نسخه اولیه مشارکت داشته و نویسنده دوم در تحلیل و تفسیر نتایج، ویرایش متن و نظارت و راهنمایی بر مدل‌سازی مشارکت و مسئولیت داشته است.

### اصول اخلاقی

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این اثر علمی رعایت نموده‌اند و این موضوع مورد تأیید همه آنها می‌باشد.

### حمایت مالی

مقاله حاضر، حاصل بخشی از رساله مقطع دکتری نویسنده اول می‌باشد که ذیل حمایت دانشگاه فردوسی مشهد در حال انجام است.

ارائه شده ملاحظه می‌شود، هر چند که با افزایش فاصله از انتهای پایین دست و از مقدار حدودی  $x/s = 0.76$ ، گرادیان هیدرولیکی در حالت آب‌بند بالادست کم‌تر از مقدار متناظر برای پایین دست است، اما همان‌طور که پژوهش‌های پیشین مانند خوسلا و همکاران (۱۹۳۶) نیز نشان داده‌اند استفاده از آب‌بند در بالادست به تنهایی پیشنهاد نمی‌شود (۱۲). اثر سازه با کف مدفون در کاهش مقدار گرادیان هیدرولیکی نسبت به سایر حالت‌ها بیشتر است. در فواصل نزدیک به انتهای پایین دست سازه، افزایش طول سازه تأثیر قابل توجهی در کاهش دبی نشت ندارد؛ به عبارت دیگر، دبی عبوری از انتهای پایین دست سازه در حالت دیواره آب‌بند در پایین دست، دو دیواره آب‌بند و سازه با کف مدفون عملاً یکسان است اما با فاصله گرفتن از انتهای پایین دست سازه، دبی نشت عبوری در حالت دیواره آب‌بند در پایین دست کم‌تر از سایر حالت‌ها خواهد بود.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان از دانشگاه فردوسی مشهد به دلیل حمایت‌های بی‌دریغ جهت انجام این پژوهش تشکر می‌نمایند.

### داده‌ها و اطلاعات

مبنای تهیه و منشأ داده‌های مقاله حاضر، بر اساس رساله مقطع دکتری نویسنده اول است که در سال

### منابع

- Ahmadian, S., and Maghrebi, M.F. 2017. Optimizing location and angle of cutoff walls in diversion dams using conformal mapping. *Journal of Hydraulic*. 12: 4. 1-13. (In Persian)
- Anderson, E.I. 2015. Exact and Approximate Solutions for Seepage through Semipermeable Cutoff Walls. *International Journal of Geo-mechanics*, 15:6. 04014087-1-04014087-10.
- Banerjee, S., and Muleshkov, A. 1992. Analytical solution of steady seepage into double-walled cofferdams. *Journal of Engineering Mechanics*. 118: 3. 525-539.
- Byrd, P.F., and Friedman, M.D. 1971. *Handbook of elliptic integrals for*

- engineers and scientists, Springer, New York, Pp: 25-27.
5. Farouk, M.I., and Smith, I.M. 2000. Design of Hydraulic Structures with Two Intermediate Filters. *Journal of Applied Mathematical Modeling*. 24: 11. 779-794.
  6. Goel, A., and Pillai, N.N., 2010. Variation of Exit Gradient Downstream of Weirs on Permeable Foundations. *Pacific Journal Science and Technology*. 11: 1. 28-36.
  7. Harr, M.E. 1962. *Groundwater and Seepage*, McGraw Hill, New York, pp. 101-135.
  8. Ijam, A.Z. 1994. Conformal Analysis of Seepage below a Hydraulic Structure with Inclined Cutoff. *International Journal for Numerical and Analytical methods in Geo-mechanics*, 18: 5. 345-353.
  9. Jain, A.K., and Reddi, L.N. 2011. Finite-Depth Seepage below Flat Aprons with Equal End Cutoffs. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*. 137: 12. 1659-1667.
  10. Kacimov, A.R., and Obnosov, Y.V. 2012. Analytical solutions for seepage near material boundaries in dam cores: The Davison-Kalinin problems revisited. *Applied Mathematical Modeling*. 36: 3. 1286-1301.
  11. Kacimov, A.R., Al-Maktoumi, A., and Obnosov, Y.V. 2019. Seepage through earth dam with clay core and toe drain: the Casagrande-Numerov analytical legacy revisited. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*. 25: 3. 1-9.
  12. Khosla, A.N., Bose, N.R., and Taylor, E.M. 1936. *Design of Weirs on Permeable Foundations*. Publication No. 12, Central Board of Irrigation, New Delhi, India.
  13. Lou, G.Y., Qui, J.S., Cao, H., and Pan, H. 2018. Simplified method for calculating inflow into a deep excavation with consideration of the effects of cutoff walls. *Hydrogeology Journal*. 26: 1. 2853-2865.
  14. Malhotra, J.K. 1936. Appendix to Chapter VII: Mathematical Investigations of the Subsoil Flow under Two Standard Forms of Structures. Publication No. 12, Central Board of Irrigation, New Delhi, India, pp. 85-90.
  15. Mansuri, B., Salmasi, F., and Oghati, B. 2014. Effect of Location and Angle of Cutoff Wall on Uplift Pressure in Diversion Dam. *Journal of Geotechnical and Geological Engineering*. 32: 1. 1165-1173.
  16. Mojtahedi, S.H., and Maghrebi, M.F. 2010. Analytical method in seepage computation from a canal with a semi-elliptic section using conformal mapping. *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*. 1: 4. 22-30. (In Persian)
  17. Polubarinova-Kochina, P.Y. 1962. *Theory of Groundwater Movement*. Translation by J.M. Roger de Wiest Princeton University, Princeton, NJ, pp. 66-106.
  18. Sheikh Rezazadeh Nikoo, N., Khalili Shayan, H., and Amiri Tokaldani, E. 2012. Experimental and numerical investigation of the optimal dimensions and location of cutoff walls, blankets and drainage on the reduction of uplift forces, seepage discharge and hydraulic gradients in diversion dam foundations. 11<sup>th</sup> Hydraulic Conference, Urmia, Iran, pp. 1-8. (In Persian)
  19. Salmasi, F., Nourani, B., and Abraham, J. 2020. Investigation of the effect of the different configurations of double-cutoff walls beneath hydraulic structures on uplift forces and exit hydraulic gradients. *Journal of Hydrology*. 586: 1. 48-58.
  20. Salmasi, F., Nouri, M., and Abraham, J. 2020. Upstream cutoff and downstream filters to control of seepage in dams. *Water Resources Management*. 34: 1. 4271-4288.
  21. Sartipi, N., Salmasi, F., Abraham, J., and Hosseinzadeh Dalir, A. 2020. Investigation of the effect of depth and distance between cutoff walls on uplift force for gravity dams. *International Journal of Environmental Science and Technology*. 18: 1. 1361-1378.
  22. Yakimov, N.D., and Kacimov, A.R. 2017. Darcian Flow under/through a Leaky Cutoff Wall: Terzaghi-Anderson's Seepage Problem Revisited. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geo-mechanics*. 41: 1. 1182-1195.



Gorgan University of Agricultural  
Sciences and Natural Resources

*J. of Water and Soil Conservation*, Vol. 28(2), 2021  
<http://jwsc.gau.ac.ir>  
DOI: 10.22069/jwsc.2021.18942.3440

Research Full Paper

## Analysis of seepage discharge variations at the downstream end of diversion dams; Pavlovsky's solution revisited

S.H. Mojtahedi<sup>1</sup> and M. Faghfour Maghrebi<sup>\*2</sup>

<sup>1</sup>Ph.D. Student of Water and Hydraulic Structures Engineering, Dept. of Civil Engineering,  
Ferdowsi University of Mashhad,

<sup>2</sup>Professor, Dept. of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Received: 03.08.2021; Accepted: 08.21.2021

### Abstract

**Background and Objectives:** The construction of aprons and diversion dams on alluvial beds have important role in rivers protection. Design of such hydraulic structures on permeable foundations is required to determine hydraulic gradient and seepage discharge at the downstream end and beyond. This important issue is well done by seepage flow analysis. The seepage flow may occur in or beneath hydraulic structures and also from the bed of open channels. One of the existing methods for analyzing seepage flow and solving Laplace equation is the application of analytical solution which is usually based on the theory of conformal mapping. The hydraulic gradient at the end of downstream and seepage discharge passing beneath diversion dams could be controlled by cutoff walls. In the present paper, closed-form analytical equations for the variations of hydraulic gradient and seepage discharge are presented as a function of the distance from downstream end for various arrangements of cutoff walls. The porous media beneath the structure is assumed to have infinite depth. The problem is solved for four scenarios: cutoff wall at downstream end, cutoff wall at upstream end, double cutoff walls at both ends and the structure with depressed floor.

**Materials and Methods:** In this paper, hydraulic gradient and seepage discharge have been obtained with respect to the distance from downstream end by the use of conformal mapping and an approach based on Darcy equation. Indeed, this method is the extension of Pavlovsky's solution. The Schwarz-Christoffel transformation is used in conformal mapping.

**Results:** Based on the resulting equations, non-dimensional charts have been produced for the variations of hydraulic gradient and seepage discharge with respect to the distance from downstream end and the length of structure. Assuming  $b$  is the length of structure,  $s$  is the depth of cutoff wall,  $x$  is the distance from downstream end, and  $d$  is the depth of depressing floor, at constant ratios of  $b/s$  or  $b/d$ , the hydraulic gradient values are decreased with increasing the distance from the end and also at constant ratios of  $x/s$  or  $x/d$ , the hydraulic gradient values are decreased with increasing the  $b/s$  or  $b/d$  ratios. For limiting the seepage discharge in a determined value which is passed from the downstream end of the structure, the value of  $b/s$  in the case of cutoff at upstream end is greater than double cutoffs, cutoff at downstream end and, depressed floor, respectively.

**Conclusion:** Based on the obtaining charts, the results show that the cutoff wall at the downstream end is more effective in decreasing seepage discharge and the hydraulic gradient in the case of depressed floor is less than the other cases.

**Keywords:** Conformal mapping, Darcy's equation, Diversion dam, Hydraulic gradients, Pavlovsky's method, Seepage

---

\* Corresponding Author; Email: maghrebi@um.ac.ir

